Versión impresa ISSN: 0716-7334
Versión electrónica ISSN: 0717-7593

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMÍA

Oficina de Publicaciones
Casilla 76, Correo 17, Santiago
www.economia.puc.cl

ÁLGEBRA MATRICIAL

Álvaro G. Parra*

Trabajo Docente Nº 75

Santiago, Agosto 2009

* agparra@northwestern.edu

Álgebra Matricial

Álvaro Parra
Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Economía

Índice

Introducción

Este documento fue pensado para complementar el estudio los alumnos de Ingeniería Comercial UC durante gran parte de su carrera. Sin estar enmarcado en un curso específico, el contenido del manuscrito es un compilado de las herramientas introducidas en cursos como Algebra Lineal y Métodos de Optimización, y posteriormente usadas en cursos como Econometría, Marketing II, Finanzas II, Teoría Econométrica (I, II y III) y diversos ramos de Teoría Económica.
El enfoque de este trabajo es el de repasar los conceptos a través de una estrategia teoría–explicación–ejemplo, presentando cada uno los tópicos de manera formal, seguida de una explicación y, por último, aplicando el concepto en un ejemplo.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a Gonzalo Edwards por la confianza depositada en mí, además de su constante apoyo y paciencia durante el desarrollo de este apunte. A Raimundo Soto por leer los borradores y darme excelentes comentarios. Por último, a todas las personas que ocuparon versiones previas de este trabajo y se dieron el tiempo de entregarme sus comentarios.

Sobre el Autor

Álvaro Parra es Ingeniero Comercial y Magíster en Economía Financiera, ambos grados obtenidos en la Pontificia Universidad Católica de Chile. Desde el 2007, se encuentra realizando estudios de Doctorado en Economía en Northwestern University, Estados Unidos. Para cualquier comentario, el autor puede ser contactado a su e-mail: `agparra@northwestern.edu` o visitar su página web: `www.agparra.com`.

1 Operaciones Básicas

Algunas Definiciones

Matriz

Una matriz es un arreglo rectangular de objetos, por lo general números, encerrados por un par de corchetes. Se pueden representar en una matriz datos agrupados por columnas, los pagos de un conjunto de activos en cada estado de la naturaleza, los coeficientes de un sistema de ecuaciones, etc. Por convención, las matrices se representan con letras en mayúsculas.

► Ejemplo 1.1

Algunos ejemplos de matrices son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

donde la matriz B puede representar los coeficientes del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{c} 2x + 3y + 7z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \end{array} .$$

Formalmente, se dice que la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

es de **orden** m x n (m por n) ya que tiene m filas y n columnas. En el ejemplo 1.1, A es de orden 2 x 2 y B es de 2 x 3. Cada **elemento** a_{ij} puede representar un número (real o complejo), una función, un conjunto o incluso otra matriz. En lo que sigue sólo nos enfocaremos en elementos reales (i.e. $a_{ij} \in \mathbb{R}$).

Matrices Cuadradas

Se dice que una matriz es **cuadrada** cuando tiene la misma cantidad de filas que de columnas. Por ejemplo, (1) es una matriz cuadrada de orden n cuando $n = m$. Si una matriz es cuadrada de orden 1 la llamamos **escalar**.[1] En el ejemplo 1.1, A es una matriz cuadrada.

Igualdad de Matrices

Las matrices A y B son iguales si y sólo si tienen el mismo orden y cada elemento de A es igual al elemento correspondiente de B, formalmente:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo } i \text{ y } j$$

Vectores

Un vector es una matriz de una fila o de una columna. Denominamos **vector columna** a una matriz de orden m x 1 y **vector fila** a una matriz de orden 1 x n.

Suma de Matrices y Multiplicación por un Escalar

Suma y Resta de Matrices

Sean A y B son dos matrices de orden m x n, su suma (o resta) es una matriz C de orden m x n donde cada elemento de C es la suma (o resta) de los elementos correspondientes en A y B, es decir:

$$A \pm B = C \iff c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \text{ para todo } i \text{ y } j$$

► Ejemplo 1.2

Si $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ entonces:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0+(-1) & 1+2 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0-(-1) & 1-2 & 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Cuando dos matrices tienen el mismo orden se les llama **conformables para la suma**.

Multiplicación de una Matriz por un Escalar

Sea A una matriz y $k \in \mathbb{R}$ un escalar, su multiplicación es la multiplicación de cada elemento de A con k. Formalmente:

$$B = kA = Ak \iff b_{ij} = ka_{ij} = a_{ij}k \text{ para todo } i \text{ y } j$$

[1] Generalmente, los corchetes son omitidos en escalares.

► Ejemplo 1.3.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, entonces:

$$B = A + A + A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = 3A = A3$$

Teorema 1.1 *Sean A, B, C matrices de un mismo orden y k un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ A + (B + C) &= (A + B) + C \\ k(A + B) &= kA + kB = (A + B)k \end{aligned}$$

Multiplicación de Vectores y Matrices

Multiplicación de Vectores

Sea $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_m \end{bmatrix}$ un vector de orden 1 x m y $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ un vector m x 1, entonces la multiplicación $C = AB$ (en ese orden) está definida como la suma de las multiplicaciones de los elementos i de la matriz A con los elementos i de la matriz B, esto es:

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = [a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_mb_m] = \sum_{i=1}^{m} a_ib_i$$

► Ejemplo 1.4

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [2(1) + 3(-1) + 4(2)] = [7]$$

$$(b) \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = [-6 - 6 + 12] = [0]$$

Nótese que lo que se hizo fue, simplemente, multiplicar una *fila* por una *columna*.

Multiplicación de Matrices

Sea A una matriz de orden m x p y B una matriz de orden p x n (i.e. la cantidad de columnas de A es igual a la cantidad de filas de B). Entonces, cada elemento c_{ij} de la matriz $C = AB$ (en ese orden) se obtiene multiplicando la fila i de la matriz A con la columna j de la matriz B:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

donde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{jk}$$

► Ejemplo 1.5

(a) si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, entonces AB es igual a:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

(b) si $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, entonces CD es igual a:

$$CD = \begin{bmatrix} 1(3) + 2(1) + 1(-2) & 1(-4) + 2(5) + 1(2) \\ 4(3) + 0(1) + 2(-2) & 4(-4) + 0(5) + 2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.2 *Sean las matrices A, B y C compatibles*[2] *para la multiplicación y k un escalar, entonces se cumple que:*

$$\begin{aligned} A(BC) &= (AB)C \\ A(B+C) &= AB + AC \\ (A+B)C &= AC + BC \\ k(AB) &= (kA)B = A(kB) = (AB)k \end{aligned}$$

Sin embargo, hay que tener en cuenta que:

(a) *generalmente* $AB \neq BA$.
(b) *si* $AB = 0$ *no necesariamente implica que* $A = 0$ o $B = 0$.
(c) *si* $AB = AC$ *no necesariamente implica que* $B = C$.

Dado que $AB \neq BA$, se pueden identificar dos tipos de multiplicaciones. Por ejemplo,

[2] Cuando dos matrices son compatibles para la multiplicación también se les llama **conformables para la multiplicación.**

si se tiene AB se puede decir que A está **premultiplicando** a B. Analogamente, se puede decir que B está **postmultiplicando** a A.
Una vez que ya aprendimos a sumar, restar y multiplicar matrices podemos pasar a definir matrices con características especiales.

Más Definiciones

Matriz Transpuesta

La **transpuesta** de una matriz A se obtiene intercambiando sus filas por sus columnas y se denota A'. Si se escribe $B = A'$ entonces se puede definir la transpuesta de A como:

$$B = A' \iff b_{ij} = a_{ji} \text{ para todo } i \text{ y } j$$

► Ejemplo 1.6

Las transpuestas de las matrices A y B del ejemplo 1.1, es decir A' y B', son respectivamente:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.3 *Si A' y B' son las traspuestas de A y B respectivamente, y si k es un escalar cualquiera, entonces:*

$$\begin{aligned} (A')' &= A \\ (A+B)' &= A' + B' \\ (kA)' &= kA' \\ (AB)' &= B'A' \end{aligned}$$

Se define **matriz simétrica** como aquella matriz que cumple con $A = A'$.

Matriz Identidad

La **matriz identidad** es una **matriz diagonal** de unos, es decir, una matriz cuadrada donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son ceros y los elementos dentro de la diagonal son unos.

► Ejemplo 1.7

Una matriz identidad de orden 3: $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y una de orden 2: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Una de las propiedades de la matriz identidad es que $AI = IA = A$.

Matrices Idempotentes

Son aquellas matrices que multiplicadas por sí mismas son ellas mismas, es decir

$$A^n = A \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por ejemplo, si $A^2 = AA = A$ entonces A sería una matriz idempotente. Además, si la matriz es *idempotente y simétrica* se cumple que $A'A = A$. Por ejemplo, la matriz identidad es idempotente y simétrica.

► Ejemplo 1.8

La siguiente matriz es idempotente $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ya que:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

La Inversa de una Matriz

Si A y B son dos *matrices cuadradas* tales que $AB = BA = I$, entonces se dice que B es la *inversa* de A y la denotamos $B = A^{-1}$. También se puede decir que A es la inversa de B.

► Ejemplo 1.9

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donde una es la inversa de la otra ya que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si una matriz no tiene inversa se le llama **matriz singular**. Análogamente, si la matriz tiene inversa se le llama **matriz no singular.**

La Traza

La **traza** *de una matriz cuadrada* es la suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz y se denota con $tr\,(\cdot)$. En el caso de la matriz (1) su traza es $a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \sum a_{ii}$.

► Ejemplo 1.10

Sean A y B las matrices del ejemplo 1.9, entonces:

$$(a)\; tr(A) = 1 + 3 + 4 = 8$$

$$(b)\; tr(B) = 6 + 1 + 1 = 8$$

Teorema 1.4 *Sean A, B, C y D matrices cuadradas del mismo orden y k un escalar, entonces se cumple que:*

$$\begin{aligned} tr(kA) &= ktr(A) \\ tr(A) &= tr(A') \\ tr(A+B) &= tr(A) + tr(B) \\ tr(I_n) &= n \\ tr(ABCD) &= tr(BCDA) = tr(CDAB) = tr(DABC) \end{aligned}$$

Nota: Esta última propiedad es muy importante y se le llama *"propiedad circular de la traza."*

Matrices Particionadas

Definición

Una matriz *particionada* es una matriz de matrices, ésta puede representar divisiones reales o imaginarias dentro de una matriz.

► Ejemplo 1.11

Podemos particionar la matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

o de la siguiente

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

para ser una mejor representación del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{c} 2x + 3y + 7z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \end{array}.$$

Formalmente, si se toma la matriz (1)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

y se *particiona* tomando s grupos de filas $(m_1, m_2, ..., m_s)$ y t grupos de columnas $(n_1, n_2, ..., n_t)$, entonces se podrá escribir (1) de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{st} \end{bmatrix}$$

donde cada elemento A_{ij} de A es una **submatriz** de orden $|m_i|$ x $|n_j|$.[3]

► Ejemplo 1.12

Sea la matriz particionada $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 3 \\ \hline 8 & 9 & 6 \end{array}\right]$, entonces se puede representar de la siguiente forma $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ donde $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \end{bmatrix}$ y $A_{22} = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$.

Un caso especial es el de la **matriz diagonal por bloques:**

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Esta matriz es de suma importancia en econometría y por eso la estudiaremos con especial atención en éste y otros capítulos.

Suma de Matrices Particionadas

Sean *A* y *B* matrices de *igual orden* y particionadas de la *misma forma*, entonces la suma

[3] El operador $|M|$ representa la cardinalidad del conjunto M. Por ejemplo, si M tiene 3 elementos, $|M| = 3$.

de estas matrices es de la forma:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & ... & A_{1t} + B_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & ... & A_{st} + B_{st} \end{bmatrix}$$

y la suma de submatrices se realiza igual que la suma de matrices.

► Ejemplo 1.13

Sea $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 3 \\ \hline 8 & 9 & 6 \end{array}\right]$ y $B = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ \hline 6 & 8 & 7 \end{array}\right]$, entonces $A + B$ es igual a:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 3 \\ \hline 8 & 9 & 6 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ \hline 6 & 8 & 7 \end{array}\right] &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{cc|c} 1+4 & 4+3 & 5+3 \\ 2+2 & 9+0 & 3+2 \\ \hline 8+6 & 9+8 & 6+7 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 8 \\ 4 & 9 & 5 \\ \hline 14 & 17 & 13 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Multiplicación de Matrices Particionadas

El estudio de matrices particionadas nació a partir del estudio de la multiplicación de matrices, recordemos el ejemplo 1.5. Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, entonces AB es igual a $AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$.

La pregunta que surgió fue: ¿Qué pasa si cada uno de los elementos de las matrices A y B son, a su vez, una matriz? La respuesta es que habría que multiplicar cada uno de estos elementos nuevamente usando la multiplicación de matrices. Pero para que esta operación esté bien definida cada una de las submatrices de la columna *i* de la matriz *A* tienen que ser *conformables para la multiplicación* con cada una de la submatrices de la fila *i* de la matriz *B*.

► Ejemplo 1.14

(a) Sea $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ y $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$, entonces AB es igual a:

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ \hline 3 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

(b) Sea $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ donde A_{11} y A_{22} son matrices cuadradas. Entonces, $A'A$ es igual a:

$$
\begin{aligned}
A'A &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A'_{11}A_{11} & 0 \\ 0 & A'_{22}A_{22} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ejercicios Propuestos

1. De las siguientes matrices, ¿Cuáles son conformables para la suma? Calcule la suma de aquellas que cumplen con la propiedad anterior.

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ -3 & 5 & 9 & 0 \end{bmatrix}. \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}
$$

$$
C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -8 \\ 3 & 0 & 9 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & -7 \\ 4 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 6 \\ -7 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
E = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -6 \\ 6 & 2 & 1 \\ -9 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 8 \\ -9 & 7 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}
$$

2. Dado $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.
   a. Calcule:
      I $A + B$.
      II $A - C$.
      III $-2A$.
   b. Verifique: $A + (B - C) = (A + B) - C$.
   c. Encuentre la matriz D tal que $A + D = B$.

3. Calcule los siguientes productos:
   a. $\begin{bmatrix} 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$.
   b. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} -9 & 8 & -7 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.
   .
   d. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   e. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
   f. $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 & -8 \end{bmatrix}$.

4. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.
   a. Muestre que $AB = BA = 0$, $AC = A$, $CA = C$.
   b. Con los resultados de *(a)* muestre que:
      I $ACB = CBA$.
      II $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.
      III $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2$.

5. Demuestre:
   a. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.
   b. $tr(kA) = ktr(A)$.

6. Calcule AB en cada uno de los siguientes casos:

a. $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ y $B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$.

b. $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$ y $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

c. $A = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$ y $B = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$.

2 Determinantes de Matrices Cuadradas

Permutaciones e Inversiones

Permutaciones

Una **permutación** es la respuesta a la pregunta ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar n números naturales distintos? La respuesta es de $n!$ formas distintas ya que para el primer puesto se tienen n posibilidades. Para el segundo, se tienen $n-1$ posibilidades ya que se ocupó un número en el primer puesto. Para el tercero, se tienen $n-2$ posibilidades ya que se puso un número en el primer puesto y otro en el segundo, y así sucesivamente.

► Ejemplo 2.1

¿De cuántas formas se pueden ordenar los números naturales $1, 2\ y\ 3$? De $3! = 6$ formas distintas:

$$\begin{array}{ccc} 123 & 132 & 213 \\ 231 & 312 & 321 \end{array}$$

Inversiones

En una permutación de números naturales del 1 a n, si un número precede a otro que es menor, decimos que estos número están invertidos y que la permutación contiene una **inversión**. Luego, el número total de inversiones que posee una permutación, por definición, es cuántos números menores prosiguen después de números mayores.

► Ejemplo 2.2

Sea 614325 una permutación de números del 1 al 6, ésta posee 8 inversiones ya que 6 es mayor que 1,4, 3, 2 y 5, además 4 es mayor que 3 y 2, por último 3 es mayor que 2.

Si el número de inversiones en una permutación es par (impar), la llamamos **permutación par (impar).**

El Número Epsilon

Para cada permutación de números naturales del 1 al n, se define el *número epsilon* de la siguiente manera:

$$\epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \begin{cases} 1 \text{ si } j_1 j_2 \ldots j_n \text{ es una permutación par} \\ -1 \text{ si } j_1 j_2 \ldots j_n \text{ es una permutación impar} \end{cases}$$

Otra forma de definirlo es

$$\epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = (-1)^k$$

donde k el número de inversiones.

► Ejemplo 2.3

El número epsilon de la permutación 321 es $\epsilon_{321} = (-1)^3 = -1$. Por otro lado el de la permutación 312 es $\epsilon_{312} = (-1)^2 = 1$.

El Determinante de una Matriz Cuadrada

Los Términos del Determinante

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Al hacer el ejercicio de tomar un elemento de la primera *fila* de A, anotar a cuál *columna* pertenece, escojer un elemento de la segunda fila sin repertir la columna y así susecivamente, se obtendran n elementos (uno por cada fila y todos de columnas distintas). Un **término del determinante de** A corresponde a la multiplicación

$$\epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \ldots a_{n j_n}$$

de los n términos y el número epsilon $\epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ generado por la permutación de las columnas, es decir, j_1 representa la columna del elemento de la fila uno, j_2 la columna del elemento de la fila 2 y así sucesivamente.

► Ejemplo 2.4

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, entonces todos los términos del determinante de A son:

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} a_{11} a_{22} a_{33} &= (1) a_{11} a_{22} a_{33} \\ \epsilon_{132} a_{11} a_{23} a_{32} &= (-1) a_{11} a_{23} a_{32} \\ \epsilon_{213} a_{12} a_{21} a_{33} &= (-1) a_{12} a_{21} a_{33} \\ \epsilon_{231} a_{12} a_{23} a_{31} &= (1) a_{12} a_{23} a_{31} \\ \epsilon_{312} a_{13} a_{21} a_{32} &= (1) a_{13} a_{21} a_{32} \\ \epsilon_{321} a_{13} a_{22} a_{31} &= (-1) a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

El Determinante de una Matriz Cuadrada

Sea A una matriz de orden n, se define el **determinante de** A como la suma de todos sus términos del determinante, y se denota $\det A$, o bien, $|A|$:

$$\det A = |A| = \sum \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

► Ejemplo 2.5

(a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \epsilon_{12} a_{11} a_{22} + \epsilon_{21} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

(b)
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{array}{c} \epsilon_{123} a_{11} a_{22} a_{33} + \epsilon_{132} a_{11} a_{23} a_{32} + \epsilon_{213} a_{12} a_{21} a_{33} + \ldots \\ +\epsilon_{231} a_{12} a_{23} a_{31} + \epsilon_{312} a_{13} a_{21} a_{32} + \epsilon_{321} a_{13} a_{22} a_{31} \end{array} \\
&= \begin{array}{c} a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + \ldots \\ +a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{array} \\
&= \begin{array}{c} a_{11}(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12}(a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + \ldots \\ +a_{13}(a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) \end{array} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(4) - 2(3) = -2$

(d)
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2(0(0) - 1(1)) - 3(1(0) - 1(2)) + 5(1(1) - 0(2)) \\
&= 2(-1) - 3(-2) + 5(1) = 9
\end{aligned}$$

Teorema 2.1 *Sea A una matriz cuadrada y k un escalar, entonces se cumple lo siguiente:*

(a) $\det A = \det A'$

(b) Si todos los elementos de una fila o una columna son ceros, entonces $\det A = 0$

(c) Si dos filas o columnas son iguales, entonces $\det A = 0$

(d) Si B es igual a A excepto por que una fila o una columna es k veces la de A, entonces se cumple que $\det B = k \det A$

(e) Si sumamos o restamos k veces una fila (o columna) a otra fila (o columna,) entonces el determinante no cambia

(f) Si intercambiamos 2 filas (o columnas) de A, entonces el determinante de la nueva matriz será $-\det A$

(g) Si B es una matriz del mismo orden de A, entonces $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

► Ejemplo 2.6

Se computan los determinantes de las matrices A y B usando el **Teorema 2.1**:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}87632 & 0{,}31141 & 0{,}11232 \\ 0{,}31141 & 0{,}24418 & 0{,}10214 \\ 0{,}11232 & 0{,}10214 & 0{,}014971 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 18 & 11 & 13 \\ 27 & 23 & 26 \\ 45 & 87 & 92 \end{bmatrix}$$

Comenzando por la matriz A. Ocupando (d) se factoriza la primera columna por 0.87632 y se obtiene:

$$0{,}87632 \begin{vmatrix} 1 & 0{,}31141 & 0{,}11232 \\ 0{,}35536 & 0{,}24418 & 0{,}10214 \\ 0{,}12817 & 0{,}10214 & 0{,}014971 \end{vmatrix}$$

por (e) se resta 0.31141 veces la primera columna a la segunda y 0.11232 veces la primera a la tercera:

$$0{,}87632 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}35536 & 0{,}13352 & 0{,}06223 \\ 0{,}12817 & 0{,}06223 & 0{,}00058 \end{vmatrix}$$

factorizando la segunda columna por 0.13352:

$$(0{,}87632)(0{,}13352) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}35536 & 1 & 0{,}06223 \\ 0{,}12817 & 0{,}4611 & 0{,}00058 \end{vmatrix}$$

substrayendo 0.06223 veces la segunda columna a la primera se tiene que:

$$(0{,}87632)(0{,}13352) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}35536 & 1 & 0 \\ 0{,}12817 & 0{,}4611 & -0{,}02843 \end{vmatrix} =$$
$$= (0{,}87632)(0{,}13352)(-0{,}02843) = -0{,}003326.$$

Para la matriz B, se resta la segunda columna a la tercera:

$$\begin{vmatrix} 18 & 11 & 2 \\ 27 & 23 & 3 \\ 45 & 87 & 5 \end{vmatrix}$$

se factoriza por 9 la primera columna y por (c) se tiene que:

$$9 \begin{vmatrix} 2 & 11 & 2 \\ 3 & 23 & 3 \\ 5 & 87 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Menores y Cofactores

Sea A una matriz cuadrada de orden n cuyo determinante existe. Entonces el determinante de la matriz que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de A es un **primer menor** de A, es denotado por $|M_{ij}|$ y es llamado **el menor de** a_{ij}. De la misma forma, **el cofactor de** a_{ij} está definido como $(-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$ y se denota por α_{ij}.

► Ejemplo 2.7

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, entonces los primeros menores y cofactores de la segunda fila son:

$$|M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, |M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, |M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

y

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}| = -|M_{21}|, \;\; \alpha_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}| = |M_{22}|,$$
$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = -|M_{23}|$$

Así como se definieron *primeros menores* como los determinantes de las matrices que resultan al eliminar una fila y una columna de una matriz dada, se puede definir *segundos menores* como los determinantes de las matrices que resultan al eliminar dos filas y dos columnas y así sucesivamente.

► Ejemplo 2.8

Imagine una matriz cuadrada de orden 5, entonces un segundo y tercer *menor* son:

$$|M_{23,24}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}, |M_{145,135}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Se dice que dos **menores son complementarios** si uno está conformado por las filas y columnas que eliminó el otro *menor*. Por ejemplo, los dos menores del ejemplo 2.8 son complementarios. Asimismo, se puede ampliar la definición de *cofactor*. El **cofactor del menor** $\left|M_{(i)(j)}\right|$ está definido como:

$$A_{(k)(p)} = (-1)^{(\sum k + \sum p)} \left|M_{(k)(p)}\right|$$

donde $\left|M_{(i)(j)}\right|$ y $\left|M_{(k)(p)}\right|$ son menores complementarios.

► Ejemplo 2.9

Consideremos la siguiente matriz cuadrada de orden 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Entonces el cofactor del menor$|M_{34,34}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$, es:

$$A_{12,12} = (-1)^{1+2+1+2}\,|M_{12,12}| = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

La Expansión de Laplace

Laplace demostró que el determinante de una matriz A puede ser calculado seleccionando r filas (o columnas) de A, formando todos los menores posibles de esas r filas (o columnas), multiplicando todos los *menores* con su *cofactor* y sumando los resultados.

► Ejemplo 2.10

Se calcula el determinante de la matriz del ejemplo 2.9 seleccionando las dos primeras filas. Observe que tendremos $\binom{4}{2} = 6$ menores ya que se tienen las si- guientes combinaciones de columnas: la columna 1 con la 2, la 1 con la 3, la 1 con la 4, 2 con la 3, la 2 con la 4, la 3 con la 4.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 21
\end{aligned}$$

Corolario: *Sea A una matriz cuadrada de orden 3, entonces su determinante puede ser calculado de las siguientes formas:*

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_j a_{ij}\alpha_{ij} \text{ para cualquier i, o bien} \\
|A| &= \sum_i a_{ij}\alpha_{ij} \text{ para cualquier j.}
\end{aligned}$$

El corolario anterior es sumamente útil al momento de invertir matrices cuadradas de orden 3.

La Adjunta de una Matriz Cuadrada

Sea *A* una matriz cuadrada de orden *n* y α_{ij} el *cofactor* del elemento a_{ij}, entonces la matriz adjunta está definida como:

$$adjunta\ A = adj\ A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

► Ejemplo 2.11

Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, sus cofactores son:

$$\alpha_{11} = 6, \alpha_{12} = -2, \alpha_{13} = -3, \alpha_{21} = 1, \alpha_{22} = -5,$$
$$\alpha_{23} = 3, \alpha_{31} = -5, \alpha_{32} = 4, \alpha_{33} = -1$$

y su adjunta es:

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.2 *Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces se cumple que:*

$$A(adj\ A)' = (adj\ A)'A = |A|\, I$$

► Ejemplo 2.12

Sea A la matriz del ejemplo 2.11, entonces:

$$A(adj\ A)' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = -7I$$

La Inversa de una Matriz

Del Teorema 2.2 se desprende una forma de calcular la matriz inversa (ver sección 1.4.4). Al manipular la conclusión del Teorema 2.2 se encuentra:

$$A^{-1} = \frac{(adj\ A)'}{|A|} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}/\,|A| & \alpha_{12}/\,|A| & \dots & \alpha_{1n}/\,|A| \\ \alpha_{21}/\,|A| & \alpha_{22}/\,|A| & \dots & \alpha_{2n}/\,|A| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}/\,|A| & \alpha_{n2}/\,|A| & \dots & \alpha_{nn}/\,|A| \end{bmatrix}$$

► Ejemplo 2.13

La inversa de la matriz del ejemplo 2.12 es:

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}8571 & -0{,}1429 & 0{,}7143 \\ 0{,}2857 & 0{,}7143 & -0{,}5714 \\ 0{,}4286 & -0{,}4286 & 0{,}1429 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.3 *Sean A, B y C matrices compatibles para la multiplicación, entonces se cumple que:*

$$\begin{aligned} \left|A^{-1}\right| &= \frac{1}{|A|} \\ (A^{-1})^{-1} &= A \\ (A^{-1})' &= (A')^{-1} \end{aligned}$$

Si A es simétrica, A^{-1} es simétrica.

$$\begin{aligned} (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\ (ABC)^{-1} &= C^{-1}(AB)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1} \end{aligned}$$

Determinantes e Inversas de Matrices Particionadas

Determinantes de Matrices Particionadas

El determinante de una *matriz particionada* se calcula igual al de una matriz común y corriente. Sin embargo, como las submatrices son de menor orden que la matriz original, puede que sea conveniente para simplificar los cómputos calcular el determinante en función de las submatrices. Acá se presentan algunos resultados importantes:

El Determinante de la Matriz Diagonal por Bloques

Sea $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ una matriz particionada diagonal por bloques, entonces su determinante está definido por:

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}|\,|A_{12}|$$

► Ejemplo 2.14

Sea $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \end{array}\right]$, entonces su determinante es:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} \\ &= (1(0) - (2)(3))((5)(8) - (6)(9)) = \\ &= 84 \end{aligned}$$

Como ejercicio puede tratar de demostrar el método expandiendo por Laplace.

El Determinante de una Matriz Particionada 2 x 2

Sea $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ una matriz particionada, entonces su determinante está definido por:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} &= |A_{11}| \left| A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \right| \\ &= |A_{22}| \left| A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right| \end{aligned}$$

► Ejemplo 2.15

Sea $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 9 & 8 \\ \hline 3 & 8 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 5 & 7 \end{array} \right]$, entonces su determinante es:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \left| \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \right| &= \\ &= -6 \left| \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0{,}333 \\ 0{,}5 & -0{,}1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \right| \\ &= -6 \left| \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 17 & 21{,}333 \\ 34 & 35{,}667 \end{bmatrix} \right| \\ &= -6 \begin{vmatrix} -15 & -18{,}333 \\ -29 & -28{,}667 \end{vmatrix} \\ &= 610 \end{aligned}$$

Inversas de Matrices Particionadas

Al igual que el determinante, su cálculo puede hacerse con la matriz no particionada pero el estudio de este tipo de matrices es esencial en econometría.

La Inversa de la Matriz Diagonal por Bloques

Sea $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ una matriz particionada diagonal por bloques, entonces su inversa está definida por:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

► Ejemplo 2.16

Sea $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \end{array}\right]$, entonces su inversa es:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0{,}333 \\ 0{,}5 & -0{,}1667 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0{,}5714 & 0{,}4286 \\ 0{,}6429 & -0{,}3571 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0{,}333 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}1667 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -0{,}5714 & 0{,}42866 \\ 0 & 0 & 0{,}6429 & -0{,}3571 \end{array}\right] \end{aligned}$$

La Inversa de una Matriz Particionada 2 x 2

Sea $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ una matriz particionada, entonces su inversa está definida por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}(I + A_{12}\xi^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}) & -\xi^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \\ -A_{11}^{-1}A_{12}\xi^{-1} & \xi^{-1} \end{bmatrix} \\ donde\ \xi &= A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) \end{aligned}$$

► Ejemplo 2.17

Sea $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 9 & 8 \\ \hline 3 & 8 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 5 & 7 \end{array}\right]$. Luego:

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}333 \\ 0{,}5 & -0{,}1667 \end{bmatrix}, \ \xi = \begin{bmatrix} -15 & -18{,}333 \\ -29 & -28{,}667 \end{bmatrix},$$

$$\xi^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}2820 & -0{,}1803 \\ -0{,}2852 & 0{,}1475 \end{bmatrix}.$$

Entonces, su inversa está dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}1754 & 0{,}0344 & -0{,}0852 & 0{,}1475 \\ -0{,}0443 & 0{,}0180 & 0{,}1934 & -0{,}0656 \\ -0{,}4967 & 0{,}4246 & 0{,}2820 & -0{,}1803 \\ 0{,}6246 & -0{,}3656 & -0{,}2852 & 0{,}1475 \end{bmatrix}$$

Rango de una Matriz

Antes de definir el rango de una matriz se introducirá el concepto de **submatriz cuadrada**. Una *submatriz cuadrada* es cualquier matriz que se obtenga eliminando filas y columnas de A, y que forme una matriz cuadrada.

► Ejemplo 2.18

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$. Luego, todas las submatrices cuadradas de A son:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$

El **rango** de una matriz es el orden de la *submatriz cuadrada* de mayor orden con *determinante no nulo*. En el ejemplo anterior el rango es 2 ya que todas las submatrices cuadradas de orden 2 tienen determinante no nulo, es decir, son no singulares.

Corolario *Sea A es una matriz cuadrada de orden n y con rango $r < n$, entonces A no tiene inversa definida.*

La demostración del corolario anterior es simple. Basta con observar que $A^{-1} = \frac{(adj\ A)'}{|A|}$; entonces, si $r < n$ significa que $|A| = 0$ y la inversa no está definida. Se desprende de lo anterior que todas las matrices cuadradas invertibles tienen rango igual a su orden ($r = n$) y por eso son llamadas matrices de rango completo.

A continuación se presentan 3 propiedades útiles del rango de una matriz:

(a) $rango\ (A) = rango\ (A')$

(b) $rango\ (AB) \leq \text{mín}(rango\ (A), rango\ (B))$

(c) $rango\ (A) = rango\ (A'A) = rango\ (AA')$

Si A es de orden M x n con $n \leq M$ y B es una matriz cuadrada de rango n, entonces:

(d) $rango\ (AB) = rango\ (A)$

Piense en la diferencia entre *(b)* y *(d)*.

Ejercicios Propuestos

1. Ocupando los términos del determinante calcule el determinante de las siguientes matrices:
   a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.
   b. $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$.
   c. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.
   d. $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   e. $E = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

2. Usando las propiedades de los determinantes (teorema 2.1) calcule el determinante de las siguientes matrices (tal como se hizo en el ejemplo 2.5):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0{,}6510 & 0{,}2234 & 0{,}1476 \\ 0{,}2234 & 0{,}5945 & 0{,}1162 \\ 0{,}1476 & 0{,}1162 & 0{,}7129 \end{bmatrix}.$$

3. Calcule todos los menores y cofactores de las siguientes matrices:
   a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$.
   b. $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.
   c. $C = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}$.

4. Calcule todos los segundos menores, con sus respectivos complementarios, de la siguiente matriz. Luego calcule su determinante expandiendo por Laplace.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

5. Calcule la adjunta y la inversa de todas las matrices del ejercicio 1.

6. Calcule el determinante y la inversa de las siguientes matrices particionadas:

a. $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$

b. $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \\ \hline 3 & 7 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right].$

7. Calcule el rango de las siguientes matrices e identifique aquellas que son de rango completo.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}.$

b. $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$

c. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$

d. $D = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

e. $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$

f. $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$

3 Espacios Vectoriales y Dependencia Lineal

Sumas de Vectores y Multiplicación por un Escalar

Se puede entender un vector de orden n x 1 como una representación de un punto **n-dimensional** en un espacio vectorial de n dimensiones ($\mathbb{R}^n$). Para entender más en profundidad esta idea se trabajará con vectores de 2 dimensiones, es decir, aquellos que pertenecen a $\mathbb{R}^2$.

► Ejemplo 3.1

El vector $x_1 = [4 \quad 2]$, representa al punto (4,2) en un espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, Gráficamente:

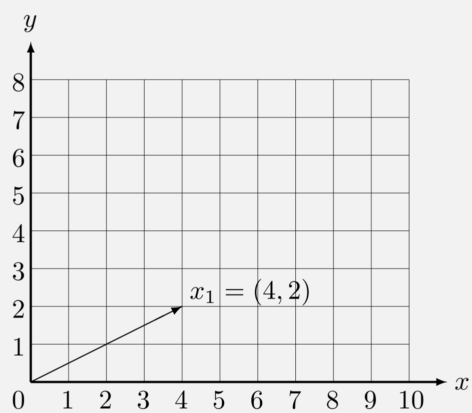

Figura 3.1: El par ordenado (4,2) en un espacio vectorial de 2 dimensiones.

Suma de Vectores

Al igual que la suma de matrices, la *suma de vectores* sólo está definida en vectores del mismo orden y es simplemente la suma elemento a elemento.

► Ejemplo 3.2

La suma de los vectores $x_1 = [4 \;\; 1], x_2 = [2 \;\; 3]$ es igual a $x_3 = [(4+2) \;\; (1+3)] = [6 \;\; 4]$. Gráficamente:

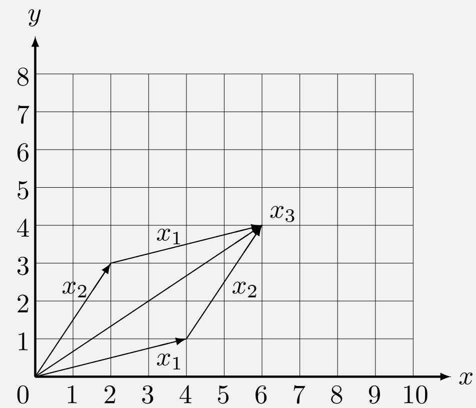

Figura 3.2: Suma de vectores

Multiplicación de un Vector por un Escalar

La multiplicación de un vector por un escalar, al igual que la multiplicación de una matriz por un escalar, es sumar k veces el mismo vector. Gráficamente, corresponde a aumentar en k veces la distancia del vector respecto a su origen.

► Ejemplo 3.3

Sea $x_1 = [3 \;\; 1]$ un vector de 2 dimensiones, entonces si se multiplica por un escalar $k = 2$, el nuevo vector será $x_1' = [6 \;\; 2]$. Gráficamente:

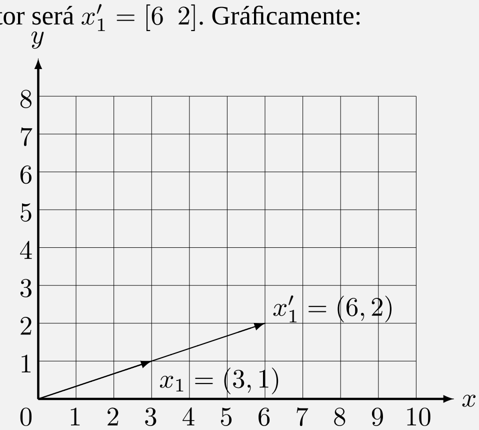

Figura 3.3: Multiplicación de un vector por un escalar.

Relaciones y Medidas de Vectores

Multiplicación de Vectores

Sea $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_m \end{bmatrix}$ un vector de orden 1 x m y $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ un vector m x 1. Su multiplicación $C = AB$ (en ese orden) está definida como la sumatoria de la multiplicación del elemento i de la matriz A con el elemento i de la matriz B, esto es:

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_m b_m] = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$$

A esta operación también se conoce como **producto punto.**

► Ejemplo 3.4

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [2(1) + 3(-1) + 4(2)] = [7]$$

$$(b) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = [2 - 2] = [0]$$

Se dicen que dos vectores son **ortogonales** si su *producto punto* es igual a 0. Los vectores del ejemplo 3.4.b son ortogonales tal y como lo muestra la figura 3.4 se puede apreciar que los *vectores ortogonales* son **perpendiculares**.

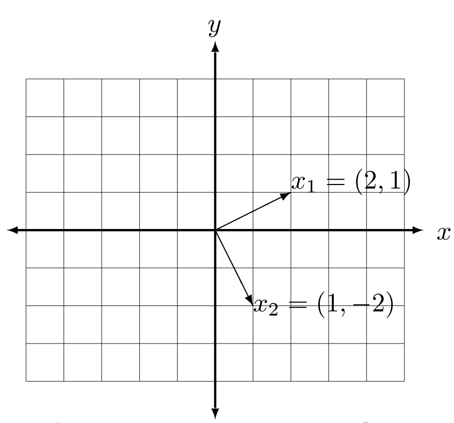

Figura 3.4: Vectores ortogonales

La Norma de un Vector

La norma o largo de un vector X está definida como la raíz cuadrada del producto punto del vector con sí mismo y lo denotamos como $||X||$:

$$||X|| = \sqrt{X'X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

Nota: Vea que la definición anterior en $\mathbb{R}^2$ no es más que el valor de la hipotenusa en el teorema de Pitágoras. La norma de un vector es la extensión de este teorema a *n–dimensiones.*
Nota: Los vectores cuya norma es igual a 1 se denominan **vectores unitarios.**

► Ejemplo 3.5

El vector $X = [1 \;\; 2 \;\; 3]$ tiene como norma $\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = 3{,}742$

Teorema 3.1. *Sean X e Y dos vectores pertenecientes a R^n, entonces se cumple:*
1. $X'Y = \frac{1}{2}(||X+Y||^2 - ||X||^2 - ||Y||^2)$.
2. $|X'Y| \leq ||X|| \cdot ||Y||$ *(desigualdad de Schwarz).*
3. $||X+Y|| \leq ||X|| + ||Y||$ *(desigualdad del triángulo).*

► Ejemplo 3.6

Sean $X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $Y' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, entonces se cumple que:

1.
$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 15$$
$$\frac{1}{2}\left(\|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|\right) = \frac{1}{2}(69 - 14 - 25) = 15$$

2.
$$15 = |X'Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 18{,}71$$

3.
$$8{,}306 = ||X+Y|| \leq \|X\| + \|Y\| = 8{,}742$$

Dependencia e Independencia lineal

Para facilitar el estudio de la (in)dependencia lineal se comenzará estudiando sistemas de ecuaciones *homogéneos*.

Sistemas Homogéneos

Un sistema de ecuaciones *homogéneo* es de la forma:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= 0 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Donde x_1, x_2 y x_3 son las incógnitas y a_i, b_i, c_i para $i = 1, 2, 3$ son los coeficientes. Entonces el sistema puede representarse de las siguientes formas:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$Sx = 0$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} x_3 = 0,$$
$$s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 = 0$$

Este tipo de sistemas siempre tiene al menos una solución, la cual es $x = 0$, esta solución se conoce como **solución trivial del sistema homogéneo**. Veamos si existe otra. Si se premultiplica en ambos lados por S^{-1}

$$\begin{aligned} S^{-1}Sx &= S^{-1}0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

se puede concluir que si existe inversa, es decir, si S es de rango completo, entonces la solución trivial será única.
Si se reordena el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} x_2 = - \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} x_3$$

se aprecia que si existiese otra solución aparte de la trivial, se puede expresar el vector s_3 en función de s_2 y s_1. Luego, se puede hacer la siguiente definición:

> **Dependencia lineal:** *Un conjunto F de vectores n–dimensionales son **linealmente dependientes** entre sí, si se puede dejar expresado un vector en función del resto. Análogamente podemos definir dependencia lineal si el sistema de ecuaciones homogéneo conformado por todos los vectores de F tiene más de una solución, o bien, la matriz S conformada por los vectores de F no es de rango completo.*

Análogamente se puede definir *independencia lineal*:

> **Independencia lineal:** *Un conjunto de vectores n-dimensionales F son **linealmente independientes** entre sí, si la solución al sistema:*

$$s_1x_1 + s_2x_2 + ... + s_nx_n = 0$$

es única, es decir, la matriz S conformada por los vectores de F es de rango completo.

► Ejemplo 3.7

(a) Los vectores $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} -4 \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix}$ son linealmente dependientes ya que $c = 2b + a$.

(b) Los vectores $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ son linealmente independientes ya que la matriz compuesta por los vectores a, b, c tiene determinante *no nulo*.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 33$$

Ejercicios Propuestos

1. Sume y grafique los siguientes vectores.

   a. $X_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}'$, $X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}'$
   b. $X_3 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix}'$, $X_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}'$
   c. $X_5 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}'$, $X_6 = \begin{bmatrix} -6 & -2 \end{bmatrix}'$
   d. $X_7 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix}'$, $X_8 = \begin{bmatrix} -2 & -6 \end{bmatrix}'$

2. Multiplique escalarmente y grafique los siguientes vectores.

   a. $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}'$, $k = 2$
   b. $X_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}'$, $k = -2$
   c. $X_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}'$, $k = -2$
   d. $X_3 = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix}'$, $k = 2$

3. Calcule el producto punto de los siguientes vectores y verifique que se cumpla $X'Y = \frac{1}{2}(||X + Y||^2 - ||X||^2 - ||Y||^2)$.

   a. $X_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}'$, $X_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}'$
   b. $X_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}'$, $X_4 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}'$
   c. $X_5 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}'$, $X_6 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}'$
   d. $X_7 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}'$, $X_8 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}'$

4. Muestre que los vectores del ejercicio 3 cumplen con la desigualdad de Schwarz y con la del Triángulo

5. Determine si los siguientes vectores son linealmente dependientes o independientes
   a. $X_1 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}', X_2 = \begin{bmatrix}4 & 3 & 5\end{bmatrix}'$
   b. $X_1 = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3\end{bmatrix}', X_2 = \begin{bmatrix}7 & 7 & -15\end{bmatrix}', X_3 = \begin{bmatrix}3 & 1 & -3\end{bmatrix}'$
   c. $X_1 = \begin{bmatrix}-1 & 4 & 3\end{bmatrix}', X_2 = \begin{bmatrix}5 & 2 & -4\end{bmatrix}', X_3 = \begin{bmatrix}8 & -3 & 1\end{bmatrix}'$
   d. $X_1 = \begin{bmatrix}-11 & 6 & 5\end{bmatrix}', X_2 = \begin{bmatrix}-4 & 1 & 2\end{bmatrix}', X_3 = \begin{bmatrix}3 & -4 & -1\end{bmatrix}'$
   e. $X_1 = \begin{bmatrix}1 & 4 & 2\end{bmatrix}', X_2 = \begin{bmatrix}-5 & 3 & -2\end{bmatrix}', X_3 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}'$

Espacios, Subespacios y Bases Vectoriales

Antes de definir *espacio* y *subespacio* vectorial tenemos que definir 2 conceptos:

Sea $\mathcal{F}$ una colección de vectores n–dimensionales, decimos que $\mathcal{F}$ está **cerrado bajo la suma** si para cualquier par de vectores pertenecientes a $\mathcal{F}$ se cumple que su suma también pertenece a $\mathcal{F}$

$$x, y \in \mathcal{F} \implies x + y \in \mathcal{F}.$$

Análogamente, $\mathcal{F}$ está **cerrado bajo la multiplicación escalar** si para cualquier vector perteneciente a $\mathcal{F}$ y cualquier escalar pertenecientes a los reales su multiplicación también pertenece a $\mathcal{F}$

$$x \in \mathcal{F} \text{ and } k \in \mathbb{R} \implies kx \in \mathcal{F}.$$

Dado lo anterior se puede definir (sub)espacio vectorial

Espacio Vectorial: *Cualquier conjunto de vectores $\mathcal{F}$ es un espacio vectorial si $\mathcal{F}$ está cerrado bajo la suma y bajo la multiplicación escalar.*
Subespacio Vectorial: *Cualquier subconjunto $F \in \mathcal{F}$ es un subespacio vectorial si F está cerrado bajo la suma y bajo la multiplicación escalar.*

► Ejemplo 3.8

$\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial y los todos vectores de la forma $\begin{bmatrix}x \\ 0\end{bmatrix}$ tal que $x \in \mathbb{R}$ forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Sistemas no Homogéneos

Un sistema de ecuaciones *no homogéneo* es de la forma:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= d_3 \end{aligned}$$

Donde x_1, x_2 y x_3 son las incógnitas y a_i, b_i, c_i, d_i para $i = 1, 2, 3$ son los coeficientes. Entonces el sistema puede representarse de las siguientes formas:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix},$$
$$Sx = D$$

Nuevamente la solución será única si S es de rango completo, ya que si se premultiplica por S^{-1} se obtiene:

$$\begin{aligned} S^{-1}Sx &= S^{-1}D \\ x &= S^{-1}D \end{aligned}$$

Este resultado es más relevante de lo que parece. No sólo nos ayudará a resolver sistemas de ecuaciones lineales, sino que también significa que si la matriz S es de rango completo, entonces siempre podremos encontrar una combinación lineal x de los vectores de S que formen **cualquier** vector D, es decir, podremos generar cualquier vector en el espacio. Esto nos lleva a otra definición:

> **Base Vectorial:** Un conjunto k de vectores F son una base para el espacio vectorial de k dimensiones $\mathbb{F}$ si estos k vectores son linealmente independientes.

En otras palabras, se tienen k vectores pertenecientes a $\mathbb{R}^k$ linealmente independientes, se puede generar cualquier otro vector perteneciente $\mathbb{R}^k$ a través de una combinación lineal de estos.

► Ejemplo 3.9

Los vectores $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ son base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, a su vez los vectores a y b no son base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, pero si son base para el subespacio de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ donde $x, y \in \mathbb{R}$.

> **Vectores Elementales:** Los vectores elementales $E_1, E_2, ..., E_n$ son vectores unitarios que sirven como base para R^n y son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E_1 &= [1 \;\; 0 \;\cdots\; 0] \\ E_2 &= [0 \;\; 1 \;\cdots\; 0] \\ \vdots &= \quad\;\; \vdots \\ E_n &= [0 \;\; 0 \;\cdots\; 1] \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

1. Determine la dimensión del espacio vectorial que generan los siguientes conjuntos de vectores. ¿De qué forma son estos espacios?

a. $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}', X_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}'$
b. $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}', X_2 = \begin{bmatrix} 7 & 7 & -15 \end{bmatrix}', X_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}'$
c. $X_1 = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}', X_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \end{bmatrix}', X_3 = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 1 \end{bmatrix}'$
d. $X_1 = \begin{bmatrix} -11 & 6 & 5 \end{bmatrix}', X_2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}', X_3 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}'$
e. $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}', X_2 = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -2 \end{bmatrix}', X_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

4 La Ecuación Característica de una Matriz

El Problema de los Valores Característicos

En muchas aplicaciones de matrices a problemas matemáticos, físicos y estadísticos surge el siguiente problema: para una matriz cuadrada A de orden n se necesita encontrar los *escalares* λ y los *vectores no nulos* X que satisfagan simultáneamente la siguiente ecuación:

$$AX = \lambda X$$

Este sistema de ecuaciones se conoce como **el problema de los valores característicos**. Ejemplos de aplicaciones a la solución este problema son caracterizar sistemas dinámicos, los cuales aparecerán en cualquier modelo económico que quiera analizar el comportamiento de los agentes en el tiempo; en econometría aparecen como la base del método de componentes principales el que trata de mermar los problemas de colinealidad; o en el test de cointegración de Johansen.
Para resolver el sistema anterior es conveniente escribirlo de la siguiente forma:

$$(A - \lambda I)X = 0$$

lo que corresponde a un sistema de ecuaciones homogéneo con n incógnitas, el cual tendrá soluciones no triviales si el determinante de la matriz de coeficientes es nulo:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

La expansión de este determinante por Laplace entrega un polinomio de grado n en λ, el que es denotado por $\varphi(\lambda)$ y se le llama **polinomio característico** de A. La ecuación que corresponde a $\varphi(\lambda) = 0$ es llamada **ecuación característica** de A.

Vectores y Valores Propios

La solución al problema característico está compuesta por 2 elementos:

(a) Las n raíces de la ecuación característica: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.
(b) Un vector asociado a cada raíz característica: $X_1, X_2, ..., X_n$.

Para aclarar conceptos, los términos Valores Propios, Valores Eigen, Valores Característicos y Valores Latentes refieren al mismo concepto. Esto es porque el primer lugar donde se dio nombre al estudio de la ecuación característica fue en Alemania donde a los λ les llamaron *Eigenwert*, cuya traducción al inglés fue *Proper Values* pero, como se verá más adelante, estos valores caracterizan completamente a una matriz por lo que son llamados *valores característicos*.

Teorema 4.1 *La ecuación $AX = \lambda X$ tiene soluciones no triviales si y sólo si λ es una raíz característica de la ecuación característica de A y la cual tiene asociado un vector no nulo X con los cuales la ecuación se satisface.*

► Ejemplo 4.1[4]

Analicemos el problema característico de la siguiente matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, cuya ecuación característica es:

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

y sus soluciones son:

$$(4-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4$$

las cuales tienen asociadas los siguientes vectores propios:

$$para\ \lambda_1 = 1 : AX = \lambda X \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{matrix}$$

podemos apreciar que la primera ecuación es igual a la segunda, entonces:

$$x_1 = -x_2 \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$para\ \lambda_2 = 4 : AX = \lambda X \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{matrix}$$

nuevamente estas ecuaciones son idénticas, esto siempre sucede cuando se cumple con el requisito de que $(A - \lambda I)$ sea singular

$$2x_1 = x_2 \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

o cualquier multiplicación escalar de X_1, X_2.

Geométricamente, los vectores propios son los únicos que se mantienen invariantes ante el operador lineal A y, cualquier otro vector que no sea el propio, se acerca a estos cuando el operador lineal es aplicado. Para entender lo anterior, se aplicará el operador A del ejemplo 4.1 al vector $B' = [0\ \ 2]$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

La figura 4.1 muestra la transformación gráficamente. Tal y como se aprecia, al premultiplicar A por B se obtuvo un vector que se encuentra a la derecha del inicial. Repitiendo el procedimiento $C' = [2\ \ 0]$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

[4] Muchos softwares computacionales y libros imponen la pseudo restricción de que la *norma* del vector propios sea unitaria ($\|X_i\|$), así se cierra el problema y se evita de que existan infinitas soluciones para los vectores propios. Además, bajo ciertas condiciones, es una propiedad deseable.

En figura 4.2 se aprecia, a diferencia del caso anterior, que al premultiplicar A por C el resultado se encuentra a la izquierda del vector original. Intuitivamente, se puede decir que deberían existir dos vectores en los cuales estas dos "fuerzas"se anulen y que los vectores resultantes tras la premultiplicación de A no se encuentren ni a la izquierda ni a la derecha del vector original. Por último, se repite el ejercicio con el vector propio X_2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

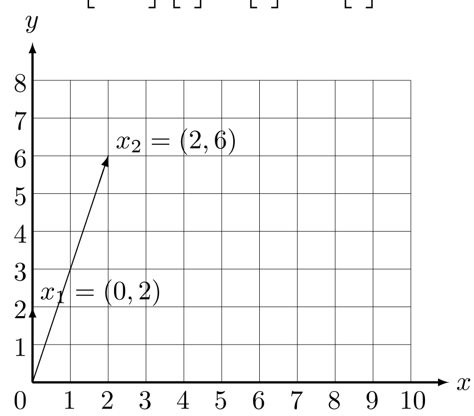

Figura 4.1: Transformación A al vector B.

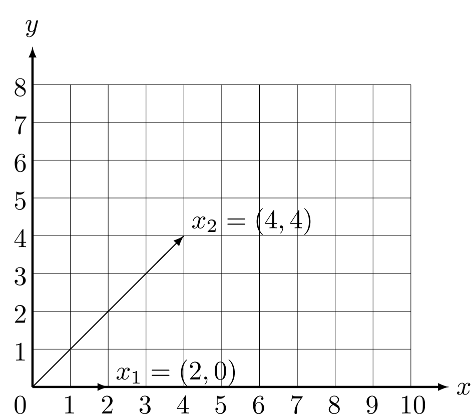

Figura 4.2: Transformación A al vector C.

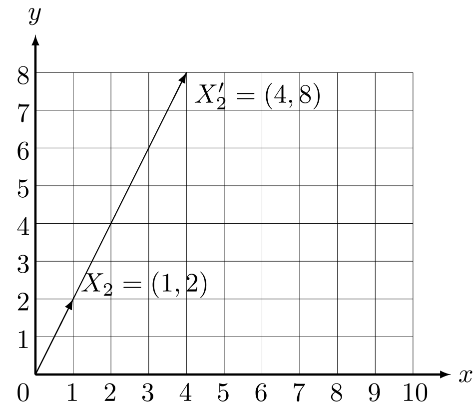

Figura 4.3: Transformación A al vector X_2.

Se puede apreciar (figura 4.3) que si se premultiplica X_2 por A, el vector resultante no se desplaza ni a la izquierda ni a la derecha, sino que aumenta en una magnitud igual a su valor propio. Luego, los vectores propios son aquellos que anulan estas fuerzas. Como ejercicio repita el procedimiento con el vector X_1.

Teorema 4.2 *Si las raíces de la ecuación característica son distintas, entonces los vectores característicos asociados a cada una de estas raíces son linealmente independientes.*

Este teorema puede ser intuitivo por la construcción de los vectores propios, pero como podría pensarse, no se puede afirmar lo contrario.

Teorema 4.3 *Si las raíces de la ecuación característica no son distintas, entonces los vectores característicos asociados a cada una de estas raíces pueden ser linealmente independientes como linealmente dependientes.*

Por ejemplo, los valores propios de una matriz identidad de orden 2 son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ pero cualquier vector puede ser su vector propio.

La Matriz Modal

La *matriz modal* es aquella que está compuesta por todos los vectores propios, es decir, es de la forma:

$$M = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & ... & X_n \end{bmatrix}$$

si se premultiplica esta matriz por la matriz A obtendremos:

$$AM = \begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 & ... & AX_n \end{bmatrix}$$

pero por definición cada uno de los elementos es:

$$\begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 & ... & AX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 X_1 & \lambda_2 X_2 & ... & \lambda_n X_n \end{bmatrix} = MD$$

donde D es una matriz diagonal de la forma $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$, entonces se puede concluir que:

$$AM = MD$$

Esta matriz es de suma utilidad ya que nos permitirá escribir (caracterizar) la matriz original en función de su valores y vectores propios. A esto se conoce como **descomposición espectral** de una matriz y se deriva *postmultiplicando* la expresión anterior por M^{-1}. Para esto, tal y como se vio en le teorema 4.2, la matriz M^{-1} tiene que estar definida. Una condición suficiente para que esto se cumpla es que los valores propios sean distintos. Si ese es el caso, se puede escribir:

$$A = MDM^{-1}$$

► Ejemplo 4.2

Continuando con el ejemplo 4.1, la descomposición espectral de A es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Aplicaciones de la Descomposición Espectral

Todas las aplicaciones que siguen están sujetas a que la matriz modal sea invertible, pero se puede estar tranquilos ya que en econometría la mayoría de las matrices con las cuales se trabaja son simétricas y, por lo tanto, se cumple el siguiente teorema:

Teorema 4.4 *Sea A una matriz simétrica de orden k, entonces A tendrá k vectores propios distintos y ortogonales entre sí. Como consecuencia de lo anterior, la matriz modal de A es siempre invertible*.[5]

El Rango de una Matriz

Ocupando la descomposición espectral de una matriz y las propiedades del rango se puede llegar a una expresión simplificada del mismo:

$$Rango\ (A) = Rango\ (MDM^{-1})$$

Como ya se sabe, M es una matriz cuadrada de rango completo (ya que es invertible,) entonces se puede ocupar la propiedad (d) del rango:

$$Rango\ (A) = Rango\ (MD)$$

ocupando la propiedad (a) y después nuevamente la (d) se obtiene:

$$Rango\ (A) = Rango\ (A') = Rango\ (D'M') = Rango\ (D') = Rango\ (D)$$

Deducir el rango de D es simple ya que como D es una matriz diagonal el número de filas o columnas linealmente independientes será el número de filas o de columnas distintas de cero.

Teorema 4.5 *El rango de un matriz A será el número de valores propios distintos*

[5] Si además se impuso la condición $\|X_i\| = 1$ se puede demostrar que $M^{-1} = M'$.

de cero si y sólo si su matriz modal es invertible.

► Ejemplo 4.3

La matriz *A* del ejemplo 4.1 es de rango 2 ya que sus dos raíces ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$) son distintas de cero.

La Traza de una Matriz

Al igual que el *rango*, se puede encontrar una expresión para la *traza* de una matriz a través de la descomposición espectral de ésta. Lo que se busca es:

$$tr(A) = tr(MDM^{-1})$$

ocupando la *propiedad cíclica* de la traza:

$$tr(A) = tr(MDM^{-1}) = tr(M^{-1}MD) = tr(ID) = tr(D)$$

dado que D es una matriz diagonal que contiene las raíces de *A* llegamos el siguiente teorema:

Teorema 4.6 *La traza de una matriz es igual a la suma de sus raíces características o valores propios.*

► Ejemplo 4.4

La traza de la matriz *A* es la suma de su diagonal $2 + 3 = 5$, como también la suma de sus raíces $1 + 4 = 5$

El Determinante de una Matriz

En este apartado vamos a tratar de encontrar una expresión para el *determinante* a través de la descomposición espectral. El determinante de *A* es igual a:

$$|A| = \left|MDM^{-1}\right|$$

ocupando la propiedad de que el determinante de la multiplicación es igual a la multiplicación de los determinantes:

$$|A| = |M|\,|D|\,\left|M^{-1}\right|$$

como la multiplicación es conmutativa:

$$|A| = |M|\,\left|M^{-1}\right|\,|D|$$

ocupando la primera propiedad pero al revés:

$$|A| = \left|MM^{-1}\right|\,|D| = |I|\,|D|$$

como el determinante de la identidad es igual a 1 se obtiene que:

$$|A| = 1\,|D| = \prod_{i}^{n} \lambda_i$$

Teorema 4.7 *El determinante de una matriz es igual al producto de sus raíces características.*

► Ejemplo 4.5.

El determinante la matriz A es $((2)(3) - (1)(2)) = 4$, y también la multiplicación de sus raíces $4(1) = 4$.

Potencias de una Matriz

Debido a lo complejo de los cálculos, una de las aplicaciones más útiles de la descomposición espectral de una matriz es su aplicación a las *potencias* de una *matriz*. Lo que se quiere es encontrar una expresión para A^n. Se comienza encontrando una expresión para A^2:

$$\begin{aligned} A^2 &= AA \\ &= (MDM^{-1})(MDM^{-1}) \\ &= (MD^2M^{-1}) \end{aligned}$$

Luego es fácil demostrar por inducción que $A^n = MD^nM^{-1}$. Esta expresión es más simple que la original ya que la matriz D^n es igual a:

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

Teorema 4.8 *Sea A una matriz con descomposición expectral definida y $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$A^n = MD^nM^{-1}.$$

Se tratará de extender el teorema anterior a los números negativos pero para esto se debe encontrar otro resultado, invirtamos A:

$$A^{-1} = (MDM^{-1})^{-1}$$

por propiedades de las matrices inversas se tiene que:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (M^{-1})^{-1}D^{-1}(M)^{-1} \\ A^{-1} &= MD^{-1}M^{-1} \end{aligned}$$

donde la matriz D^{-1} es de la siguiente forma:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\lambda_n \end{bmatrix}.$$

Note que la inversa de D es simplemente una matriz diagonal con los recíprocos de las raíces características. Esto nos permite obtener la inversa de una matriz a través de la descomposición espectral de una manera fácil y rápida.

Teorema 4.9 *Sea A una matriz con descomposición expectral definida. Si la matriz A^{-1} existe, entonces sus vectores propios son los mismos que los de A y sus valores propios son los recíprocos de A.*

Observe que si una o más raíces de A son iguales a cero, es decir, A no es de rango completo, entonces D^{-1} no estaría definida y la inversa de A tampoco.
Análogamente, se puede encontrar por inducción que $A^{-n} = MD^{-n}M^{-1}$. Luego, se puede extender el teorema 4.8 de la siguiente forma:

Teorema 4.8* *Sea A una matriz con descomposición expectral e inversa definida y $n \in \mathbb{Z}$. Entonces se cumple*

$$A^n = MD^nM^{-1}.$$

De la misma forma, se puede pensar que el resultado anterior podría expandirse a potencias con números reales. Esto es errado pues si se elevase un número negativo por $\frac{1}{2}$, se estará buscando una raíz de un número negativo, lo cual no está definida en $\mathbb{R}$.

Teorema 4.11 *Sea A una matriz con descomposición expectral e inversa definida y cuyas raíces características son no negativas. Entonces, para todo $n \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$A^n = MD^nM^{-1}.$$

► Ejemplo 4.6

Se calcula $A^{\frac{1}{2}}$ y A^{-1} para la matriz A del ejemplo 4.1

$$(a) \quad A^{\frac{1}{2}} = MD^{\frac{1}{2}}M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad A^{-1} = MD^{-1}M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Matrices Idempotentes

Las matrices idempotentes son aquellas matrices que cumplen con la propiedad $A^n = A$ para todo natural n. Para entender las implicancias de esta propiedad en la descomposición espectral de una matriz estudiemos A^2 para A idempotente:

$$A^2 = MD^2M^{-1}$$

pero idempotencia implica

$$A = MD^2M^{-1}$$

entonces

$$MDM^{-1} = MD^2M^{-1} \tag{2}$$

la única forma que se cumpla (2) es que $\lambda^2 = \lambda$, es decir, las raíces características de A

tienen que ser 0 o 1. Suponga que todas las raíces son 1, luego:

$$\begin{aligned} A &= MIM^{-1} \\ &= MM^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

Si las raíces no son todas 1, es decir, algunas raíces son iguales a 0 y ocupando la definición de *rango* se puede afirmar que A es singular.

Teorema 4.12 *Todas las matrices idempotentes, excepto la matriz identidad, son singulares. La única matriz idempotente de rango completo es la matriz identidad.*

Por último, tomando en cuenta que el *rango* de una matriz son los valores propios distintos de ceros y que en una matriz *idempotente* sus raíces son 0 o 1 se puede concluir:

Teorema 4.13 *El rango de una matriz idempotente es igual a la suma de sus raíces características, es decir, es igual a su traza.*

Ejercicios Propuestos

1. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

a. Encuentre la ecuación característica de cada matriz.
b. Encuentre los vectores y valores propios de cada una de esas matrices imponiendo la restricción de que $\|X_i\| = 1$.
c. Encuentre la matriz modal y su inversa para cada una de las matrices.
d. Calcule $M\prime M$.
Usando la descomposición espectral calcule:
e. El rango de todas las matrices.
f. La traza de todas las matrices.
g. El determinante de todas las matrices.
h. Las potencias de la forma A^3, A^{-3} para todas las matrices.

5 Formas Lineales, Cuadráticas y Cálculo Matricial

Formas Lineales

Un polinomio lineal homogéneo es un polinomio de grado 1 y se puede representar de la siguiente forma:

$$q = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$$

y una representación matricial del mismo sería:

$$q = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = AX$$

donde q, A y X pueden pertenecer a los números reales. Este tipo de notación matricial es muy útil en problemas de optimización y en cualquier otro ámbito donde se manejen muchos polinomios y ecuaciones.

Formas Cuadráticas

Un polinomio cuadrático homogéneo es un polinomio compuesto sólo de términos de grado 2, es decir:

$$q = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

y se puede expresar en notación matricial de la siguiente forma:

$$q = X'AX$$

donde A tiene la propiedad de ser una matriz simétrica y q es un número real.

► Ejemplo 5.1

Se escribe en forma matricial la siguiente forma cuadrática:

$$q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$$

para esto se debe expandir la expresión $X'AX$, con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} q &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \\ &\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_{1+}a_{32}x_3x_2 \end{aligned}$$

Observe que los elementos de la diagonal de A tienen términos al cuadrado, mientras que el resto de los elementos son los coeficientes de los términos de la forma x_ix_j. Dado lo anterior, nos es conveniente reescribir el polinomio de la siguiente forma:

$$q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 4x_1x_3 + 4x_3x_1 + 0x_2x_3 + 0x_3x_2$$

entonces, su forma matricial es:

$$\begin{aligned} q &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= X' \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} X \end{aligned}$$

Matrices Definidas y Semidefinidas

Se quiere estudiar cuando la forma cuadrática de q es siempre positiva o siempre negativa. Para esto, se analiza la descomposición espectral de A. En una forma cuadrática A es simétrica. Luego, por el teorema 4.5, sus vectores característicos son ortogonales entre sí. Sin pérdida de generalidad, se impone que cada uno de los vectores característicos sea un vector unitario $(M_i'M_i = 1)$, entonces:

$$\begin{aligned} M'M &= \begin{bmatrix} M_1' \\ M_2' \\ \vdots \\ M_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1'M_1 & M_1'M_2 & \dots & M_1'M_n \\ M_2'M_1 & M_2'M_2 & \dots & M_2'M_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_n'M_1 & M_n'M_1 & \dots & M_n'M_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

cumpliéndose que:

$$M'M = I \Rightarrow M' = M^{-1}$$

por lo que la descomposición espectral puede ser reescrita como:

$$A = MDM'.$$

Substituyendo en la forma cuadrática y defininedo $y = M'X$ se tiene que:

$$q = X'AX = X'MDM'X = y'Dy.$$

Como D es una matriz diagonal, se puede escribir la expresión anterior de la siguiente forma:

$$q = X'AX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

luego, si A es simétrica, el valor de q dependerá sólo de las raíces características.

Sea A una matriz simétrica. Si todas todas las raíces de A son positivas (negativa), entonces se dice que A es **positiva (negativa) definida**. Si las raíces de A son mayores (menores) o iguales a cero, entonces se dice que A es **positiva (negativa) semidefinida**, o bien, **definida no negativa (positiva).**

Cálculo Matricial

Funciones Reales

Una función real $f : X \to \mathbb{R}$, denotada por $y = f(\mathbf{x})$, es una relación que asocia, de manera única, un conjunto de valores $\mathbf{x} \in X$ a un valor $y \in \mathbb{R}$. En esta relación se denomina a las variables $\mathbf{x}$ como **variables independientes** o **dominio** y a la variable y como **variable dependiente** o **recorrido**.

► Ejemplo 5.2

Son ejemplos de conjuntos dominio X: $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ o cualquier conjunto arbitrario.

► Ejemplo 5.3

La forma lineal corresponde a una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forma:

$$q = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

donde $x_1, x_2, ..., x_n$ son las variables del dominio y q es la variable del recorrido.

La forma cuadrática corresponde a una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forma:

$$q = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

donde $x_1, x_2, ..., x_n$ son las variables del dominio y q es la variable del recorrido.

Derivadas de Funciones Reales

La derivada de una función representa el cambio de y respecto a un cambio infinitesimal de una de las variables independientes. Se denomina **vector gradiente** a aquel vector columna que representa las primeras derivadas de una función respecto a todas las variables independientes. Son representaciones del *vector gradiente*:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

► Ejemplo 5.4

El vector gradiente de una función de la forma:

$$y = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

es:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Teorema 5.1 *Sea* $f(X) = AX$ *, entonces:*

$$\frac{\partial f(X)}{X} = A'.$$

► Ejemplo 5.5

El vector gradiente de la función en el ejemplo 5.1

$$y = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$$

es:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 \\ -4x_1 + 4x_2 \\ 8x_1 - 14x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -4 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2AX \end{aligned}$$

Teorema 5.2 *Sea* $f(X) = X'AX$*, entonces:*

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = 2AX.$$

Por otro lado se denomina **matriz Hessiana** a la matriz de segundas derivadas de una función. Se obtiene tomando cada elemento del vector gradiente y derivándolo respecto a cada una de las variables independientes, es decir:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Teorema de Young. *Si una función es continua y doblemente diferenciable, entonces se cumple que:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Es decir, las derivadas cruzadas son idénticas.

Entonces podemos afirmar que, si la función es doblemente diferenciable, la matriz Hessiana es simétrica.

► Ejemplo 5.6

La matriz Hessiana de la función en el ejemplo 5.1 es:

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3 \partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -4 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & -14 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \\ &= 2A \end{aligned}$$

entonces podemos concluir que el Hessiano de una forma cuadrática es:

$$H = \frac{\partial^2 X' A X}{\partial X^2} = 2A$$

Aproximación a una Función

Muchas veces es más fácil trabajar con una función aproximada que con ella misma. Una herramienta para hacer esto es la expansión de Taylor. La expansión de Taylor es una aproximación polinomial de una función, que consiste en caracterizarla en función de sus derivadas y un punto arbitrario. Se expondrá la expansión de primer y segundo orden pero hay que recalcar que entre mayor el orden de la aproximación mejor será ésta.[6]

[6] En el límite, cuando el orden tiende a infinito, Taylor demostró que las funciones son idénticas. Es obvio que la función a aproximar tiene que ser infintamente diferenciable para que el teorema aplique.

Aproximación de Primer Orden

La aproximación de Taylor de primer orden nos entrega una forma funcional lineal de la función original y su formula es:

$$y \approx f(\mathbf{x}_o) + \nabla f(\mathbf{x}_o)'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$$

donde $\mathbf{x}_o$ es el punto de expansión, $f(\mathbf{x}_o)$ es la función evaluada en el punto de expansión y $\nabla f(\mathbf{x}_o)'$ es el vector gradiente evaluado en el punto traspuesto.

► Ejemplo 5.7

Sea $f(x_1, x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$. Su aproximación de primer orden por Taylor entorno al punto $\mathbf{x}_o = (1, 2)$, sería de la forma:

$$\begin{aligned} y &\approx \ln(1) + \ln(2) + \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} \\ y &\approx -1{,}307 + x_1 + \frac{x_2}{2} \end{aligned}$$

comparemos:

$$\begin{aligned} f(1, 2) &= \ln(1) + \ln(2) = 0,693 \\ y(1, 2) &\approx -1{,}307 + 1 + \frac{2}{2} = 0,693 \end{aligned}$$

en el punto de expansión son idénticos. Veamos en un punto cercano $(1{,}1, 2{,}1)$

$$\begin{aligned} f(1{,}1, 2{,}1) &= \ln(1{,}1) + \ln(2{,}1) = 0{,}837 \\ y(1{,}1, 2{,}1) &\approx -1{,}307 + 1{,}1 + \frac{2{,}1}{2} = 0,843 \end{aligned}$$

Aproximación de Segundo Orden

La aproximación de Taylor de segundo orden nos entrega un polinomio de segundo orden y su formula es:

$$y \approx f(\mathbf{x}_o) + \nabla f(\mathbf{x}_o)'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)H(\mathbf{x}_o)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$$

donde $\mathbf{x}_o$ es el punto de expansión, $f(\mathbf{x}_o)$ es la función evaluada en el punto de expansión, $\nabla f(\mathbf{x}_o)'$ es el vector gradiente evaluado en el punto traspuesto y $H(\mathbf{x}_o)$ es el Hessiano de la función evaluado en el punto.

► Ejemplo 5.7

Sea $f(x_1, x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$. Su aproximación de segundo orden por Taylor entorno al punto $\mathbf{x}_o = (1, 2)$, es lo que ya se había proximado más el termino del Hessiano evaluado en el punto:

$$\begin{aligned} y &\approx \ln(1) + \ln(2) + \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} \\ y &\approx -3{,}307 + 3x_1 + \frac{3x_2}{2} - x_1^2 - \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

Comparemos:

$$y(1,2) \approx -3{,}307 + 3(1) + 3\frac{2}{2} - 1^2 - \frac{2^2}{2} = 0{,}693$$

nuevamente en el punto de expansión son iguales. En el punto $(1{,}1, 2{,}1)$

$$y(1,2) \approx -3{,}307 + 3(1{,}1) + 3\frac{2{,}1}{2} - 1{,}1^2 - \frac{2{,}1^2}{2} = 0{,}8305$$

Ejercicios Propuestos

1. Escriba las siguientes formas cuadráticas en notación matricial.

   a. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$
   b. $2x_1^2 - 6x_1x_2 + x_3^2$
   c. $x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$

2. Escriba la siguiente matriz como una forma cuadrática.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ una matriz, entonces las submatrices de A son:

$$A_1 = [a_{11}]\,, A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, ..., A_n = A$$

   entonces demuestre que:

   a. Si A es positiva definida, entonces los determinantes de las submatrices de A son todos positivos.
   b. Si A es positiva semidefinida, entonces los determinantes de las submatrices de A son todos no-negativos.
   c. Si A es negativa definida, entonces los determinantes de las submatrices de A alternan de signo partiendo por $|A_1| < 0, |A_2| > 0, |A_3| < 0, ..., |A_n|\,(-1)^n > 0$.
   d. Si A es negativa semidefinida, entonces los determinantes de las submatrices de A alternan de signo partiendo por $|A_1| \leq 0, |A_2| \geq 0, |A_3| \leq 0, ..., |A_n|\,(-1)^n \geq 0$.

4. Encuentre $\frac{\partial X'AX}{\partial X}$ y $\frac{\partial^2 X'AX}{\partial X^2}$ para todas las formas cuadráticas de los ejercicios 1 y 2.

5. Aproxime por Taylor las siguientes funciones:

   a. $f(x) = \cos(x)$, en primer grado y alrededor de π.
   b. $f(x) = \sin(x)$. en primer grado y alrededor de $2\frac{\pi}{3}$.

c. $f(x) = e^x$, en quinto grado entorno al 0.
d. $f(x_1, x_2) = x_1 \ln(x_2)$, en segundo grado entorno al punto $(2, 2)$.

Bibliografía

[1] **Ayres, Frank, Jr.** 1962. "Theory and Problems of Matrices."*Schaum Publishing Co.*

[2] **Edwards, Gonzalo**. 2000. "Introducción al Análisis de Sistemas Dinámicos." 2^{da} edición. *Ediciones Universidad Católica de Chile*. Cap 9 y 14.

[3] **Schneider, Hans y Barker, George Phillip**. 1968. "Matrices and Linear Algebra." *Holt Rinehart and Winston, inc*.

[4] **Lang, Serge**. 1969. "Linear Algebra." 4^{ta} edición. *Addison-Wesley Publishing Co*.

[5] **Greene, William**. 2000. "Análisis Econométrico." 3^{ra} edición. *Prentice Hall.*

[6] **Hohn, Franz**. 1967. "Elementary Matrix Algebra." 2^{da} edición. *The Macmillan Co*.